

Thèmes pour l'examen oral d'Algèbre linéaire I et II
Themen zur mündlichen Prüfung von Lineare Algebra I und II
2014/15

La matière examinée comprend le cours, les séries d'exercices et les tests.

Voici une liste nonexhaustive de définitions et propositions du cours d'Algèbre linéaire I et II:

Der Prüfungsstoff umfasst die Vorlesungen, die Übungsaufgaben und die Tests.

Hier eine unvollständige Liste von Definitionen und Sätzen aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II:

Definitionen

Mengen (Vereinigung, Durchschnitt, Differenzmenge, Kartesisches Produkt)

Abbildungen (injektiv, surjektiv, bijektiv, Bild, Urbild, Umkehrabbildung)

Gruppen, Ringe, Körper, Homomorphismen

Äquivalenzrelation

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (Menge der Restklassen modulo m)

komplexe Zahlen \mathbb{C}

Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen/lineare Abbildungen

Bild und Kern eines Homomorphismus

Linearkombination, linear abhängig, linear unabhängig, *span*

Basis, kanonische Basis des \mathbb{K}^n

Dimension $\dim V$

Summe von Vektorräumen, direkte Summe, Projektion, komplementärer Untervektorraum

Quotientenvektorraum

Gauss-Algorithmus, elementare Zeilenoperationen, Zeilen-Stufen Form

Définitions

ensembles (union, intersection, différence, produit cartésien)

applications (injective, surjective, bijective, image, image réciproque, application réciproque)

groupes, anneaux, corps, homomorphismes

relation d'équivalence

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (ensemble des résidus modulo m)

nombres complexes \mathbb{C}

espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, homomorphismes/applications linéaires

image et noyau d'application linéaire

combinaison linéaire, linéairement dépendant/liée, linéairement indépendant/libre, *span*

base, base canonique de \mathbb{K}^n

dimension $\dim V$

somme des espaces vectoriels, somme directe, projection, sous-espace complémentaire/supplémentaire

espace quotient

méthode d'élimination de Gauss-Jordan, opérations élémentaires, matrice écholonnée

Lineare Gleichungssysteme, (erweiterte) Koeffizientenmatrix	système d'équations linéaires, matrice (augmentée) des coefficients
Matrizen, Zeilenvektoren, Spaltenvektoren, Matrizen-Multiplikation, Matrizenring $M(n \times n, \mathbb{K})$	matrices, vecteur ligne, vecteur colonne, produit de deux matrices, l'anneau des matrices $M(n \times n, \mathbb{K})$
darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$ eines Homomorphismus $\Phi : V \rightarrow W$ bzgl. einer Basis \mathcal{A} von V und einer Basis \mathcal{B} von W	$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi) =$ matrice de l'homomorphisme $\Phi : V \rightarrow W$ par rapport aux bases \mathcal{A} de V et \mathcal{B} de W
Homomorphismus $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ assoziiert zur Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$	homomorphisme $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ associé à une matrice $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$
$Hom(V, W), End(V), Aut(V)$	$Hom(V, W), End(V), Aut(V)$
$A^T =$ Transponierte von A	$A^T =$ transposée de A
invertierbare Matrizen, $Gl_n(\mathbb{K})$	matrices inversibles, $Gl_n(\mathbb{K})$
Transformationsmatrix für zwei Basen	matrice de transformation/matrice de passage entre deux bases
ähnliche (konjugierte) Matrizen, äquivalente Matrizen	matrices semblables, matrices équivalentes
Rang eines Homomorphismus, Zeilenrang $ZR(A)$, Spaltenrang $SR(A)$	rang de l'application linéaire, rang des vecteurs lignes $ZR(A)$, rang des vecteurs colonnes $SR(A)$
Axiome für die Determinante	caractérisation axiomatique du déterminant
Determinante eines Endomorphismus	déterminant d'un endomorphisme
Elementarmatrizen	matrices élémentaires
Symmetrische Gruppe S_n , Transpositionen, Inversionen, Signum $sign$	groupe symétrique S_n , transposition, inversion, signum $sign$
komplementäre Matrix A^\sharp	matrice complémentaire A^\sharp
Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume	valeur propre, vecteur propre, espace propre
diagonalisierbar, Diagonalmatrix	diagonalisable, matrice diagonale
charakteristisches Polynom	polynôme caractéristique
Polynomring $\mathbb{K}[t]$, Grad eines Polynoms	anneau des polynômes $\mathbb{K}[t]$, degré du polynôme
Vielfachheit/Multiplizität der Nullstelle $\mu(p, \lambda)$	multiplicité de la racine $\mu(p, \lambda)$

trigonalisierbar, obere (untere) Dreiecksmatrix, F -invariante Fahnen

Ideal, Hauptideal, Hauptidealring

Minimalpolynom M_F

nilpotente Endomorphismen

Jordanmatrix

Verallgemeinerte Eigenräume N_λ

Jordan-Normalform

Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem reellen Vektorraum, euklidischer Vektorraum, Norm $\| \cdot \|$, Abstand/Metrik $d(\cdot, \cdot)$, Orthogonalität \perp , Winkel

Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem komplexen Vektorraum, unitärer Vektorraum, Norm $\| \cdot \|$, Abstand $d(\cdot, \cdot)$, Orthogonalität \perp

Orthonormalbasis (ONB), orthogonale Basis

orthogonales Komplement, orthogonale Summe

orthogonale und unitäre Endomorphismen, $O(n)$, $U(n)$

Orientierung eines reellen Vektorraums

orientierungserhaltende und orientierungsumkehrende Endomorphismen

$GL_n^+(\mathbb{R})$, $SO(n)$

selbstadjungierte Endomorphismen, symmetrische und hermitesche Matrizen

symmetrische Bilinearform, darstellende Matrix, zugehörige quadratische Form

Kegelschnitte

trigonalisable, matrice triangulaire supérieure (inférieure), drapeau stable par F

idéal, idéal principal, anneau principal

polynôme minimal

endomorphisme nilpotent

matrice de Jordan

espaces caractéristiques N_λ

réduction de Jordan

produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un espace vectoriel réel, espace euclidien, norme $\| \cdot \|$, distance/métrique $d(\cdot, \cdot)$, orthogonalité \perp , angle

produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un espace vectoriel complexe, espace hermitien, norme $\| \cdot \|$, distance $d(\cdot, \cdot)$, orthogonalité \perp

base orthonormée (BON), base orthogonale

complément orthogonal, somme directe orthogonale

endomorphismes orthogonaux et unitaires, $O(n)$, $U(n)$

orientation d'un espace vectoriel réel

endomorphismes qui préserve ou renverse l'orientation

$GL_n^+(\mathbb{R})$, $SO(n)$

endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques, matrices hermitiennes

forme bilinéaire symétrique, représentation matricielle, forme quadratique associée

Coniques

Linearformen, Dualraum V^* , duale Abbildung F^* , duale Basis, Annulator U^0 , $V^{**} = \text{Bidualraum von } V$, kanonischer Isomorphismus $\iota : V \rightarrow V^{**}$

formes linéaires, espace dual V^* , application duale F^* , base duale, annulateur U^0 , $V^{**} = \text{bidual de } V$, isomorphisme canonique $\iota : V \rightarrow V^{**}$

Sätze

Fundamentalsatz der Algebra (ohne Beweis)

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist ein Körper $\iff m$ ist eine Primzahl

Basis = minimales Erzeugendensystem = max. linear unabhängiges System

jeder endlich dimensionale Vektorraum besitzt eine Basis

Austauschsatz von Steinitz, Basisergänzungssatz

Dimensionsformel für Summe von Vektorräumen

Dimensionsformel für Bild und Kern eines Homomorphismus $f : V \rightarrow W$

$\dim V = \dim W \iff V \cong W$

$f : V \rightarrow W$ linear, $\dim V = \dim W = n$.
Dann gilt: f inj. $\iff f$ surj. $\iff f$ bij.

Berechnung der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$

Jede Matrix lässt sich durch elementare Zeilenoperationen in Zeilen-Stufen Form bringen

$M_B^A : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M(m \times n, \mathbb{K})$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen

$\dim \text{Hom}(V, W) = m \cdot n$

$M_A^A : \text{End}(V) \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ ist ein Isomorphismus von Ringen

A invertierbar $\iff A^T$ invertierbar

Théorèmes

théorème fondamental de l'algèbre/théorème de D'Alembert (sans démonstration)

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un corps $\iff m$ est un nombre premier

base = famille génératrice minimale = famille libre maximal

chaque espace vectoriel de dimension finie admet une base

lemme de Steinitz, théorème de la base incomplète

formule de Grassmann

formule pour la dimension de l'image et du noyau d'une application linéaire

$\dim V = \dim W \iff V \cong W$

$f : V \rightarrow W$ linéaire, $\dim V = \dim W = n$.
Alors on a : f inj. $\iff f$ surj. $\iff f$ bij.

Calcul d'ensembles de solutions pour une système d'équations linéaires $Ax = b$

Par une suite d'opérations élémentaires on peut transformer toute matrice en une matrice écholonée

$M_B^A : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M(m \times n, \mathbb{K})$ est un isomorphisme de espace vectoriels

$\dim \text{Hom}(V, W) = m \cdot n$

$M_A^A : \text{End}(V) \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ est un isomorphisme d'anneaux

A inversible $\iff A^T$ inversible

Transformationsformel für darstellende Matrizen

$$ZR(A) = SR(A)$$

A und \tilde{A} sind äquivalent $\iff A$ und \tilde{A} haben den gleichen Rang

Eigenschaften der Determinante

$\det A \neq 0 \iff A$ ist invertierbar

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

$\det(f)$ ist wohldefiniert für einen Endomorphismus f

\det existiert und ist eindeutig

jede Permutation ist Produkt von Transpositionen

$sign : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus

Leibniz-Formel für die Determinante

$$A^\# \cdot A = A \cdot A^\# = (\det A) \cdot E_n, A \text{ invertierbar} \implies A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\#$$

Entwicklungssatz von Laplace

Cramersche Regel

$$Eig(F; \lambda_1) \cap Eig(F; \lambda_2) = \{0\}, \text{ falls } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Hat $F \in End(V)$ n verschiedene Eigenwerte ($n = \dim V$), so ist F diagonalisierbar

$$\lambda \text{ Eigenwert von } F \iff \det(F - \lambda \cdot id) = 0$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_F sind die Eigenwerte von F

Euklidischer Algorithmus, Division mit Rest

formule de changement de base

$$ZR(A) = SR(A)$$

A et \tilde{A} sont équivalentes $\iff rg(A) = rg(\tilde{A})$

propriétés du déterminant

$\det A \neq 0 \iff A$ est inversible

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

$\det(f)$ est bien défini pour un endomorphisme f

unicité et existence du déterminant

chaque permutation est un produit de transpositions

$sign : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est un homomorphisme de groupes

formule de Leibniz

$$A^\# \cdot A = A \cdot A^\# = (\det A) \cdot E_n, A \text{ inversible} \implies A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\#$$

formule de Laplace

Règle de Cramer

$$Eig(F; \lambda_1) \cap Eig(F; \lambda_2) = \{0\} \text{ si } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Si $F \in End(V)$ admet n valeurs propres ($n = \dim V$) deux à deux distinctes, alors F est diagonalisable

$$\lambda \text{ est valeur propre de } F \iff \det(F - \lambda \cdot id) = 0$$

racines de polynôme caractéristique p_F sont les valeurs propres de F

théorème de la division euclidienne

$$p_F(t) = a_n t^n + \dots + a_0 \implies a_n = (-1)^n, a_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \text{tr}(F), a_0 = \det F$$

Zerlegung von reellen Polynomen in Faktoren vom Grad 1 oder 2

$$\lambda \text{ Eigenwert von } F \in \text{End}(V) \implies 1 \leq \dim \text{Eig}(F; \lambda) \leq \mu(p_F; \lambda)$$

$F \in \text{End}(V)$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow V$ ist direkte Summe der Eigenräume $\Leftrightarrow p_F$ zerfällt in Linearfaktoren und $\dim \text{Eig}(F; \lambda) = \mu(p_F; \lambda)$ für alle λ

Lösen von Rekursionsgleichungen und Systemen linearer Differentialgleichungen

F trigonalisierbar \Leftrightarrow es gibt eine F -invariante Fahne

F trigonalisierbar $\Leftrightarrow p_F$ zerfällt in Linearfaktoren

jeder Endomorphismus eines komplexen Vektorraums ist trigonalisierbar

Satz von Cayley-Hamilton

F Endomorphismus eines reellen Vektorraumes $V \implies$ es gibt einen F -invarianten Untervektorraum W der Dimension 1 oder 2

M_F teilt p_F und p_F teilt $(M_F)^n$ (n ist die Dimension des Vektorraums)

Für F ein Endomorphismus eines n -dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraumes gilt: F nilpotent $\Leftrightarrow p_F(t) = (-1)^n t^n \Leftrightarrow F^d = 0$ für ein $d \leq n \Leftrightarrow F$ ist durch eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Diagonalen darstellbar

$$p_F(t) = a_n t^n + \dots + a_0 \implies a_n = (-1)^n, a_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \text{tr}(F), a_0 = \det F$$

décomposition d'un polynôme en produits de polynômes de degré 1 ou 2

$$\lambda \text{ valeur propre de } F \in \text{End}(V) \implies 1 \leq \dim \text{Eig}(F; \lambda) \leq \mu(p_F; \lambda)$$

$F \in \text{End}(V)$ diagonalisable $\Leftrightarrow V$ est la somme directe des espaces propres $\Leftrightarrow p_f$ est scindé et $\dim \text{Eig}(F; \lambda) = \mu(p_F; \lambda)$ pour tous λ

résolution d'une système de suites récurrentes et d'une système différentiel linéaire

F trigonalisable \Leftrightarrow il existe un drapeau stable par F

F trigonalisable $\Leftrightarrow p_F$ est scindé

tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe est trigonalisable

théorème de Cayley-Hamilton

F endomorphisme d'un espace vectoriel réel $V \implies$ il existe un sous-espace de dimension 1 ou 2 qui est stable par F

M_F divise p_F und p_F divise $(M_F)^n$ (n est la dimension des espace vectoriel)

Pour F un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n on a: F nilpotent $\Leftrightarrow p_F(t) = (-1)^n t^n \Leftrightarrow$ il existe $d \leq n$ t.q. $F^d = 0 \Leftrightarrow F$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure avec des coefficients nuls sur la diagonale

Jordan-Normalform für nilpotente Endomorphismen

p_F zerfällt in Linearfaktoren $\implies V$ ist direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume

Theorem über die Jordan-Normalform

F diagonalisierbar $\iff M_F = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)$

Zerlegung von Dunford: $A = D + N$, D diag., N nilpot. und $DN = ND$

Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU) für euklidische und unitäre Vektorräume

Gram-Schmidt Verfahren

jeder endlich dim. euklidische oder unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis (ONB)

F orthogonaler oder unitärer Endomorphismus, λ Eigenwert von $F \implies |\lambda| = 1$

ein orthogonaler oder unitärer Endomorphismus F erhält die Norm, ein orthogonaler Endomorphismus F erhält den Winkel

ein normerhaltender Endomorphismus auf einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum ist orthogonal bzw. unitär

die orthogonalen bzw. unitären Endomorphismen auf einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum bilden eine Gruppe

$A \in O(n) \iff A^{-1} = A^T$, $A \in U(n) \iff A^{-1} = \bar{A}^T$

$A \in O(n)$ oder $A \in U(n) \implies |\det A| = 1$

réduction de Jordan pour l'endomorphisme nilpotent

p_F scindé $\implies V$ est la somme directe des espaces caractéristiques

théorème de la réduction de Jordan

F diagonalisable $\iff M_F = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)$

décomposition de Dunford: $A = D + N$, D diag., N nilpot. et $DN = ND$

inégalité de Cauchy-Schwarz (CSU) pour les espaces euclidiens ou hermitiens

procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

tout espace euclidien ou hermitien de dimension finie admet une bases orthonormée (BON)

F un endomorphisme orthogonal ou unitaire, λ une valeur propre de $F \implies |\lambda| = 1$

un endomorphisme orthogonal ou unitaire préserve la norme, un endomorphisme orthogonal préserve l'angle

un endomorphisme d'un espace euclidien (resp. hermitien) qui préserve la norme est orthogonal (resp. hermitien)

les endomorphismes euclidiens (resp. unitaires) d'un espace euclidien (resp. hermitien) forment un group

$A \in O(n) \iff A^{-1} = A^T$, $A \in U(n) \iff A^{-1} = \bar{A}^T$

$A \in O(n)$ ou $A \in U(n) \implies |\det A| = 1$

Beschreibung von $SO(2)$ und von $O(2) \setminus SO(2)$

Satz vom Fussball (Klassifikation der orthogonalen Abbildungen auf \mathbb{R}^3)

ein unitärer Endomorphismus kann bzgl. einer ONB diagonalisiert werden

zu $A \in U(n)$ gibt es $S \in U(n)$ mit $\bar{S}^T A S$ diagonal

entsprechende Aussage für orthogonale Endomorphismen

ein selbstadjungierter Endomorphismus kann bzgl. einer ONB diagonalisiert werden und alle Eigenwerte sind reell

Transformationsformel für eine Bilinearform unter Basiswechsel

Hauptachsentransformation

Polarisation

quadratische Formen ohne gemischte Terme

Klassifikation der Kegelschnitte

description de $SO(2)$ et de $O(2) \setminus SO(2)$

théorème de football (classification des endomorphismes orthogonaux en dimension 3)

un endomorphisme unitaire est diagonalisable par rapport à une BON

si $A \in U(n)$ il existe $S \in U(n)$ t.q. $\bar{S}^T A S$ est diagonale

l'assertion correspondant pour des endomorphismes orthogonaux

un endomorphisme autoadjoint est diagonalisable par rapport à une BON et toutes les valeurs propres sont réelles

formule de transformation pour la forme bilinéaire sur un changement de base

transformation aux axes principaux

polarisation

réduction des formes quadratiques

classification des coniques

$$\dim U^0 = \dim V - \dim U$$

A beschreibt $F : V \rightarrow W$ bzgl. Basen von V und $W \implies A^T$ beschreibt $F^* : W^* \rightarrow V^*$ bzgl. der dualen Basen

$$\operatorname{rg}(F) = \operatorname{rg}(F^*), \operatorname{ZR}(A) = \operatorname{SR}(A)$$

$\dim V < \infty \implies$ der kanonische Homomorphismus $\iota : V \rightarrow V^{**}$ ist ein Isomorphismus

$$\dim U^0 = \dim V - \dim U$$

$F : V \rightarrow W$ est représenté par A par rapport aux bases de V et $W \implies F^* : W^* \rightarrow V^*$ est représenté par A^T par rapport aux bases duales

$$\operatorname{rg}(F) = \operatorname{rg}(F^*), \operatorname{ZR}(A) = \operatorname{SR}(A)$$

$\dim V < \infty \implies$ l'homomorphisme canonique $\iota : V \rightarrow V^{**}$ est un isomorphisme