Enseignant: Ales Janka ALGÈBRE LINÉAIRE II

SÉRIE 13

À rendre avant le jeudi 26 février, 14h

Exercice 1

Déterminez les valeurs propres, leur multiplicités algébrique et géométrique et les espaces propres correspondants des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3\times 3, \mathbb{R})$. b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3\times 3, \mathbb{R})$.

Exercice 2

Décidez sans trop calculer si les matrices suivantes sont diagonalisables. Justifiez.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4\times 4, \mathbb{R})$. b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4\times 4, \mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit $p = t^4 - 2\,t^3 + t^2 + 6\,t + 14 \in \mathbb{C}[t]$ un polynôme, dont une racine est $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}\,i$.

a) Déterminez sans trop calculer une autre racine $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ de p. Justifiez.

b) Utilisez la division polynomiale pour déterminer toutes les racines restantes de p.

Exercice 4

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et soit $f, g \in \mathbb{K}[t]$,

$$f = [5]\,t^4 + [4]\,t^3 + [5]\,t^2 + [3]\,t + [1] \qquad \text{et} \qquad g = [3]\,t^2 + [2]\,t + [1].$$

a) Trouvez les polynômes $q, r \in \mathbb{K}[t]$ tq.

$$f = g \cdot q + r \qquad \text{et} \qquad \deg(r) < \deg(g).$$

b) Déterminez toutes les racines $\lambda \in \mathbb{K}$ du polynôme f.

Exercice 5

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.