UNI
FR
UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Enseignant: Ales Janka — ALGÈBRE LINÉAIRE II

SÉRIE 14

À rendre avant le jeudi 5 mars, 14h

Exercice 1

Pour a entier, soit $[a] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sa classe d'équivalence dans le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. La matrice

$$\begin{pmatrix} [1] & [-1] \\ [0] & [-2] \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}),$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2

Soit $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ une matrice avec déterminant négatif qui possède au moins une valeur propre réelle positive. Montrez qu'alors toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Exercice 3

Supposons il existe juste deux livres pour le cours d'Algèbre linéaire (livre A et livre B). Au début de chaque année scolaire, les professeurs choisissent lequel des deux ils feront acheter à leurs étudiants. L'étude du marché montre que parmi les professeurs qui ont utilisé le livre A une année, deux tiers l'utiliseront l'année suivante et un tiers changera pour le livre B. Parmi les professeurs qui ont utilisé le livre B, trois quarts l'utiliseront l'année suivante et seulement un quart va changer pour le livre A. Selon la même étude, ces règles du comportement ne changent pas en temps. En 2000, 50% des enseignants ont choisi le livre A et 50% le livre B.

a) Calculez la prédiction de la proportion des enseignants utilisant le livre A, resp. le livre B, n années après l'an 2000, en % en fonction de n.

b) Quelle proportion du marché occupera le livre A dans la limite $n \to \infty$, quand le marché se stabilise et atteint un *état stationnaire*?

Exercice 4

Trouvez les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x - 5y \\ \frac{dz}{dt} &= -3x - 6y - 5z. \end{aligned}$$

Exercice 5
La *matrice compagnon* d'un polynôme $p = t^n + a_{n-1}\, t^{n-1} + \ldots + a_1\, t + a_0 \in \mathbb{K}[t]$ avec $a_n = 1$, est une matrice $C_p \in M(n \times n, \mathbb{K})$ donnée par

$$C_p := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

a) Prouvez que l'ensemble des valeurs propres de C_p est égal à l'ensemble des racines du polynôme p.

b) Admettons que p possède n racines distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Montrez que la matrice de Vandermonde (voir Série 12 Ex 5)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & (\lambda_1)^2 & \cdots & (\lambda_1)^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & (\lambda_n)^2 & \cdots & (\lambda_n)^{n-1} \end{pmatrix}$$

diagonalise la matrice C_p, c'est à dire

$$S\, C_p\, S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

c) Prouvez que C_p est diagonalisable si est seulement si le polynôme p est scindé et toutes les racines sont de multiplicité 1.

Exercice 6
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.