

**Exercice 1**

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer le polynôme caractéristique  $p_A$  et ses zéros.
- b) Trouver  $S \in GL_3(\mathbb{R})$  telle que  $SAS^{-1}$  soit une matrice triangulaire supérieure.

**Exercice 2**

Peut-on mettre la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sous forme triangulaire sur  $\mathbb{Q}$  ? Justifiez.

**Exercice 3**

L'étude des oscillations amorties a besoin du système d'équations différentielles

$$A \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où  $\omega$  et  $\mu$  sont des nombres réels positifs et  $y_0, y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions différentiables avec  $y_0(0) = \alpha$  et  $y_1(0) = \beta$ , où  $\alpha, \beta$  représentent des constantes réelles.

- a) Montrer que
  - i)  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  quand  $\mu < \omega$ ,
  - ii)  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  quand  $\mu > \omega$ .
- b) Donner l'ensemble des solutions du système (1), avec les conditions initiales  $y_0(0) = \alpha$  et  $y_1(0) = \beta$ , pour  $\mu < \omega$  et  $\mu > \omega$ .
- c) Montrer que si  $\mu = \omega$ , la matrice  $A$  peut être mise sous forme triangulaire sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

deux matrices de  $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ .

- a) Montrer que  $AB = BA$ .
- b) Montrer que  $A$  et  $B$  sont diagonalisables.
- c) Déterminer une base  $(v_1, v_2, v_3)$  de vecteurs propres communs (c.-à-d.  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et chaque  $v_i$  est un vecteur propre de  $A$  et de  $B$ ).

---

**Exercice 5**

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

- a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.
- b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.