Enseignant: Ales Janka | ALGÈBRE LINÉAIRE II

SÉRIE 16

À rendre avant le jeudi 19 mars, 14h

Exercice 1

a) On considère une application linéaire $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de polynôme minimal $M_F(t) = t(t^2 - 1)$. Quel est le polynôme caracteristique p_F?

b) Calculez le polynôme caracteristique et le polynôme minimal des matrices suivantes:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Pour la matrice C du point précédent, vérifiez par calcul le théorème de Cayley-Hamilton, c'est-à dire que $p_C(C) = 0$, l'application linéaire nulle.

Exercice 2

Trigonaliser la matrice

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Méthode : Déterminer $S \in \mathrm{Gl}_4(\mathbb{R})$ telle que SAS^{-1} est triangulaire supérieure.

Exercice 3

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \in \mathrm{End}(V)$ un endomorphisme. On dit que F est *nilpotent* s'il existe un $\ell \in \mathbb{N}$ avec $F^\ell = 0$. Montrez que:

a) zéro est la seule valeur propre de F.

b) si F est diagonalisable, alors $F = 0 \in \mathrm{End}(V)$.

c) si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors il existe une base $\mathcal{A}$ de V t.q. $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

a) Soit $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ la matrice associée à $F \in \operatorname{End}(V)$ par rapport à la base $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$. Soit $V_k := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$. On définit l'endomorphisme $G_k : V \to V$ par

$$G_k := (\lambda_1 \cdot \mathrm{id}_V - F) \circ \cdots \circ (\lambda_k \cdot \mathrm{id}_V - F) \qquad , \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Montrez que $G_k(V_k) = \{0\}$ pour tout k.

b) Soit $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure et $\lambda \in \mathbb{K}$ un élément de la diagonale de A. Montrez que λ est une racine du polynôme $M_A(t)$.

Exercice 5

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.