Enseignant: Ales Janka SÉRIE 17 ALGÈBRE LINÉAIRE II

À rendre avant le jeudi 26 mars, 14h

Exercice 1

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $F \in \mathrm{End}(V)$ un endomorphisme.

a) Soit $p \in \mathbb{K}[t]$ un polynôme. Montrez que si λ est une valeur propre de F, alors $p(\lambda)$ est une valeur propre de $p(F)$.

b) Soit $p \in \mathbb{K}[t]$ un polynôme de degré m avec $p(F) = 0$. Montrez que le sous-espace vectoriel $W = \mathrm{span}(v, F(v), \ldots, F^{m-1}(v))$ est stable par F (F-invariant), c'est à dire que $F(W) \subset W$.

c) Soit $1 \leq \deg M_F < \deg p_F$. Montrez que pour tout $v \in V$ les vecteurs $\big(v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v)\big)$ sont forcément linéairement dépendants.

Exercice 2

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

a) Soit $F \in \mathrm{End}(V)$ un endomorphisme diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ toutes les valeurs propres distinctes de F, $r \leq n$. Montrez que le polynôme minimal de F vaut

$$M_F(t) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r).$$

b) Calculez le polynôme minimal de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit V un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_4)$.
Soit $F \in \mathrm{End}(V)$ un endomorphisme pour lequel

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminez, sans trop calculer:

a) toutes les valeurs propres de F avec leurs multiplicités algébriques et géométriques,

b) le polynôme caractéristique p_F,

c) le polynôme minimal M_F.

Expliquez le lien entre la forme de $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ (la forme de Jordan) et vos conclusions.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Trouvez une matrice $S \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ tel que
$S\,A\,S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice nilpotente. Trouvez $S \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$, tel que SAS^{-1} est de la forme

$$\begin{pmatrix} J_d & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & J_d & & & & & & \\ & & & J_{d-1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & J_{d-1} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & J_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & J_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(k \times k, \mathbb{K}).$$

Exercice 6

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.