**Enseignant: Ales Janka** ALGÈBRE LINÉAIRE II

SÉRIE 18

*À rendre avant le jeudi 2 avril, 14h*

**Exercice 1**

On considère l'ensemble $I := \{p \in \mathbb{R}[t] \mid p(1)^2 + p(2)^2 = 0\}$.

a) Montrer que $I$ est un idéal.

b) Trouver un polynôme normé $M \in \mathbb{R}[t]$ tel que $I = (M)$.

**Exercice 2**

On considère l'ensemble

$$I := \left\{q \in \mathbb{R}[t] \mid q = p \cdot (t^2+1),\ \text{où } p \in \mathbb{R}[t]\right\}.$$

Montrer que $I$ est un idéal engendré par le polynôme $t^2+1$. On a donc $I = (t^2+1)$.

**Exercice 3**

Soit $R$ un anneau et $I \subset R$ un idéal. Soit $a, b \in I$. Montrer que la relation

$$a \sim b \Longleftrightarrow a - b \in I$$

est une relation d'équivalence (c'est-à-dire une relation réflexive, symétrique et transitive).

**Exercice 4**

Soit $V$ un espace vectoriel réel de dimension finie et soit $F \in \mathrm{End}(V)$ avec $F^3 = 9F$. Montrer que $F$ est diagonalisable.

**Exercice 5**

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -2 \\ 10 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.

b) Déterminer le polynôme minimal de $A$.

c) Déterminer la forme normale de Jordan pour $A$.

**Exercice 6**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

a) Calculez le polynôme caractéristique $p_A$ et le polynôme minimal $M_A$.

b) Déterminez les espaces caractéristiques de $A$.

c) Trigonalisez $A$ par la réduction de Jordan, c'est-à-dire trouvez un $S \in \mathrm{Gl}_4(\mathbb{R})$ tel que $SAS^{-1}$ a la forme réduite de Jordan.

---

**Exercice 7**

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.