

Exercice 1

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 10. Soit $F : V \rightarrow V$ un endomorphisme avec

$$p_F = t^4 (2 - t)^4 (3 + t)^2 \quad \text{et} \quad M_F = t^3 (t - 2)^2 (t + 3).$$

- Quelles sont les formes normales de Jordan possibles pour F ? Énumérez toutes les possibilités.
- Calculez $\dim \operatorname{im}(F)$ et $\dim \ker(F)$.

Exercice 2

Soit $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorphisme avec le polynôme caractéristique $p_F(t) = (t^2 + 1)(t - 2)^2$. Sachant en plus que $q(F) = 0$ pour $q(t) = (t^2 - 4)(t^2 + 1)$, décidez si F est

- diagonalisable sur \mathbb{R} .
- trigonalisable sur \mathbb{R} .
- diagonalisable sur \mathbb{C} .
- trigonalisable sur \mathbb{C} .

Justifiez votre décision en donnant la matrice diagonale et/ou la matrice normale de Jordan de F . Écrivez le polynôme minimal de F .

Exercice 3

Pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Cherchez une matrice $S \in \operatorname{GL}_4(\mathbb{R})$ et une forme normale de Jordan $J \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ de façon que $A = S^{-1}JS$.
- Écrivez p_A et M_A .
- La matrice A est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ?
- La matrice A est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?

Exercice 4

Soit $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ une base d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V . Soit $F \in \operatorname{End}(V)$ défini par rapport à la base \mathcal{A} par la matrice

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Modifiez la base \mathcal{A} pour obtenir une base \mathcal{B} pour laquelle la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ aurait la forme normale de Jordan.

Exercice 5

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

- a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.
- b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.