UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Enseignant: Ales Janka — SÉRIE 21 — ALGÈBRE LINÉAIRE II

À rendre avant le jeudi 30 avril, 14h

Exercice 1

On a vu au cours qu'une application $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est appelée *norme* si

$$i)\quad \|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0 \quad , \quad ii)\quad \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \text{et} \quad iii)\quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

pour tout $v, w \in V$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si V est équipé par un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ induit une norme (on parle d'une *norme induite*). Mais il existe des normes pour lesquelles il n'existe pas un tel produit scalaire.

a) Soit V un espace vectoriel réel équipé d'une norme $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$. Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme induite par un produit scalaire si et seulement si

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \forall v, w \in V.$$

Dans ce cas, exprimez $\langle v, w\rangle$ en utilisant la norme $\|\cdot\|$.

b) Montrez que $\|x\| := \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et prouvez que pour $n \geq 2$ il n'existe pas de produit scalaire qui induirait cette norme.

Exercice 2

Déterminez le complément orthogonal $U^\perp$ de U dans $\mathbb{R}^4$ pour:

a) $U = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1,1,1,1)^T$, $v_2 = (1,2,4,5)^T$ et $v_3 = (1,-3,-4,-2)^T$.

b) $U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \text{ et } x_1 - 2x_4 = 0\right\}$.

Exercice 3

Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $(v_1, \ldots, v_r)$ une famille de vecteurs orthonormaux dans V. Prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes.

a) La famille $(v_1, \ldots, v_r)$ est une base de V.

b) Pour tout $v, w \in V$ on a $\langle v, w\rangle = \sum\limits_{i=1}^{r} \langle v, v_i\rangle \cdot \langle v_i, w\rangle$.

c) Pour tout $v \in V$ on a $\|v\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} |\langle v, v_i\rangle|^2$.

Exercice 4

Soit $\sigma \in S_n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, \ldots, x_n)^T \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})^T$. Montrer que f est une application orthogonale (par rapport au produit scalaire standard).

Exercice 5

Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel hermitien et $F : V \to V$ une application unitaire. Soit v un vecteur propre de F qui correspond à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit w un vecteur propre de F qui correspond à la valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$. Montrez que

$$(\lambda \neq \mu) \Longrightarrow (v \perp w).$$

Exercice 6
Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application orthogonale avec $\det(F) = -1$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ telle que F peut être représentée par rapport à la base $\mathcal{B}$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 7
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.