

**Exercice 1**

Soit  $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1-i & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ . Montrer que  $A \in U(3)$ . Déterminer l'inverse  $A^{-1}$ .

**Exercice 2**

On considère la matrice

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Vérifier que  $A$  est une matrice unitaire.
- La matrice  $A$  représente une rotation. Déterminer l'angle et l'axe de rotation.
- Trouver une matrice  $S \in U(3)$  telle que la matrice  $\overline{S}^T A S$  est diagonale.

**Exercice 3**

Pour quelles valeurs de  $a$  et de  $b$  la matrice carrée d'ordre  $n \geq 2$

$$a \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & b & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & b \end{pmatrix}$$

est-elle orthogonale?

**Exercice 4**

Soit  $V$  un espace vectoriel euclidien et soit  $F : V \rightarrow V$  une application injective telle que  $\angle(F(v), F(w)) = \angle(v, w)$  pour tout  $v, w \in V$ ,  $v \neq 0$ ,  $w \neq 0$  (l'application  $F$  conserve les angles). Montrer que sous cette condition il existe une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$  et une application orthogonale  $G : V \rightarrow V$ , telles que  $F = \lambda \cdot G$ .

**Exercice 5**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminez une matrice  $S \in \text{Gl}_3(\mathbb{R})$  telle que  $S^T A S$  soit diagonale.

**Exercice 6**

Soit  $V$  un espace euclidien ou hermitien et  $F : V \rightarrow V$  un endomorphisme autoadjoint. Soient  $v$  et  $w$  des vecteurs propres correspondants à des valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  de  $F$ . Alors :  $\lambda \neq \mu \Rightarrow v \perp w$ .

---

**Exercice 7**

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

- a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.
- b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.