**Enseignant: Ales Janka** — Série 23 — Algèbre linéaire II

*À rendre avant le jeudi 21 mai, 14h*

**Exercice 1**

Soit $V$ un espace vectoriel euclidien. Pour $a \in V$, $a \neq 0$, on définit l'application

$$F_a(x) := x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a \quad , \quad \forall x \in V.$$

Prouvez que:

a) l'on a $\|F_a(x)\| = \|x\|$, $F_a^2 = \mathrm{id}_V$, $F_a(a) = -a$, et $\langle F_a(x), y\rangle = \langle x, F_a(y)\rangle$, pour tout $x, y \in V$.

b) l'application $F_a$ est la réflexion de $V$ par rapport à $\{a\}^\perp$,

c) pour $u, v \in V$ avec $u \neq v$ , $\|u\| = \|v\|$, il existe un vecteur non nul $a \in V$ tel que $F_a(u) = v$ et $F_a(v) = u$.

d) pour un espace $V$ à dimension finie, $\dim V = n$, tout $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal est le produit d'au plus $n$ réflexions.

Spécialement, soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire orthogonale.

e) Prouvez que $F$ est forcément soit une refléction par rapport à une droite qui passe par l'origine, soit une rotation d'angle $\alpha \in [0, 2\pi)$ autour de l'origine (avec les cas spéciaux $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ et $F = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ si $\alpha = 0$, resp. $\alpha = \pi$.

f) Soit $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une autre application linéaire orthogonale. Complétez (et justifiez par une preuve) le tableau suivant:

| **si $F$ est une** | **et $G$ est une** | **alors $F \circ G$ est une** |
|---|---|---|
| réflection | réflection | ... |
| réflection | rotation | ... |
| rotation | réflection | ... |
| rotation | rotation | ... |

Pour les applications linéaires orthogonales $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

g) énumérez toutes les possibilités envisageables pour l'application orthogonale $F$ (ou $G$) en termes des transformations simples en 3D (rotations, symétries, identités, etc.). Justifiez votre liste par un argument mathématique.

h) étudiez, à l'instar de f), la nature de la composition $F \circ G$ dans toutes les combinaisons des cas de g).

Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire et orthogonale.

i) Montrez que $|\operatorname{tr}(F)| \leq n$. Quand est-ce qu'il y a l'égalité?

**Exercice 2**
Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique donnée par

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 - 2\,x_1\,x_4 + 2\,x_2^2 + 3\,x_3^2 + x_4^2$$

a) Trouvez une forme bilinéaire symétrique $s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ associée à la forme quadratique $q$.

b) Ecrivez la matrice symétrique $A \in \mathrm{M}(4 \times 4, \mathbb{R})$ qui représente $q$ (ou $s$) par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

c) Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$,

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ecrivez la matrice symétrique $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(s)$ qui représente $s$ (ou $q$) dans la base $\mathcal{B}$.

d) Trouvez une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ pour que la matrice $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(s)$ qui représente $s$ (ou $q$) soit diagonale.

e) La forme bilinéaire $s$ (ou la forme quadratique $q$) est-elle définie ou semi-définie (positive ou négative), ou indéfinie?

**Exercice 3**
Déterminez le type, le centre et les axes principales des coniques dans $\mathbb{R}^2$ données par les équations implicites suivantes:

a) $9\,x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 + 6\,x_2^2 + 16\,x_1 - 8\,x_2 - 2 = 0$

b) $4\,x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 + x_2^2 - 6\,x_1 + 3\,x_2 - 4 = 0$

c) $2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + 5\,x_2^2 - 6\,x_1 - 8\,x_2 - 1 = 0$

d) $x_1^2 - 12\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 + 12\,x_1 + 8\,x_2 + 5 = 0$

---

**Exercice 4**
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.