UNI
FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Enseignant: Ales Janka ALGÈBRE LINÉAIRE II

Test à choix multiples, 2ème semestre

Test à blanc, révision pour l'exam oral

Choisissez les bonnes réponses. Plusieurs réponses peuvent être correctes pour un exercice. Justifiez-vous chaque réponse.

Exercice 1

A est une matrice $n \times n$ nilpotente. Alors:

a) $p_A(t) = (-1)^n \cdot t^n$.

b) toutes les valeurs propres de A sont différentes de 0.

c) A est toujours diagonalisable.

d) $A = 0$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n)$. Alors:

a) n est valeur propre de A.

b) $\dim(\ker(A)) = n - 1$.

c) A est diagonalisable.

d) $(0, \dots, 0)^T$ est vecteur propre de A.

Exercice 3

La matrice $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

a) est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ pour toute valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ pour toute valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) possède deux valeurs propres réelles seulement pour α un multiple de π.

d) possède deux valeurs propres complexes seulement pour α un multiple de π.

Exercice 4

V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $F \in \mathrm{End}(V)$, p_F le polynôme caractéristique de F. Alors:

a) $a_n = (-1)^n$.

b) $\deg(p_F) = n$.

c) $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(F)$.

d) $a_0 = \det(F)$.

Exercice 5

Soit $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ une matrice avec $A^{100} = 0$. Alors:

a) $A^2 = 0$ b) $A^3 = 0$ c) $A^4 = 0$ d) $p_A = -M_A = -t^3$

Exercice 6
Soit V un espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \in \mathrm{End}(V)$. Si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel F-invariant, alors:

a) F est orthogonal $\Longrightarrow U^{\perp}$ est F-invariant.
b) F est auto-adjoint $\Longrightarrow U^{\perp}$ est F-invariant.
c) F est auto-adjoint et ne possède que la valeur propre $\lambda \Longrightarrow F = \lambda\, id_V$.
d) F est auto-adjoint et ne possède que la valeur propre $\lambda \Longrightarrow \dim(\mathrm{V}) = 1$.

Exercice 7
Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 et $F : V \to V$ une application linéaire. On sait que $M_F(t) = (t-2)^2(t-3)$ et $p_F(t) = (t-2)^3(t-3)$. Quelles sont les formes normales de Jordan possibles pour la matrice qui représente F?

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 8
Soit une matrice $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ avec $p_A(t) = -t(t^2 - 4t + 4)$. Alors:

a) A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
b) A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
c) A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
d) A n'est pas orthogonale.

Exercice 9
Soit une application linéaire F avec la propriété $F^3 = 16F$. Laquelle des propositions suivantes est vraie?

a) $M_F(t) = t^3 - 16t$.
b) F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
c) F est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
d) $p_F(t) = 16t - t^3$.

Exercice 10
Soit V un espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors:

a) Pour tout sous-espace vectoriel U d'un espace vectoriel V à dimension fini, on a $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$.
b) Toute base de V est orthonormale.
c) V possède au moins une base orthonormale.

Exercice 11
Laquelle des affirmations suivantes est vraie pour $\mathbb{R}^n$?

a) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.
b) $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$.
c) $\|x\| := \max(|x_i| : i = 1, \ldots, n)$ définit une norme.
d) $\langle x, y \rangle := \max(|x_i y_i| : i = 1, \ldots, n)$ définit un produit scalaire.

Exercice 12
Soit V un espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux bases de V. Soit $F : V \to V$ une application orthogonale. Alors:

a) F conserve les angles.

b) F est injective.

c) F est surjective si V est à dimension fini.

d) F n'est pas surjective si V est à dimension infini.

e) La matrice associée $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ est forcément orthogonale.

f) La matrice associée $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ est forcément orthogonale.

Exercice 13
La forme normale de Jordan de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est donnée par:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 14
Soit $F : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^8$ une application linéaire avec $p_F = (t-2)\cdot(t+5)^4\cdot(t-10)^3$ et $M_F = (t-2)\cdot(t+5)^2\cdot(t-10)^2$. Alors le nombre de possibilités pour la forme normale de Jordan de F est:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8

Exercice 15
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f = t^3 - t^2 + t - 4 \in \mathbb{K}[t]$ et $g = t^2 + 1$. Alors le reste r de la division de f par g est:

a) $t^3 - t^2 + t - 4$ b) $3(t^2 - 1)$ c) 0 d) t

Exercice 16
Soit $F : \mathbb{R}^{1000} \to \mathbb{R}^{1000}$ une application linéaire avec $F^3 = 5\cdot F$. Alors:

a) F est diagonalisable b) F n'est pas diagonalisable

Exercice 17
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et soit $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ le bloc de Jordan de taille k. Alors il existe $S \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ telle que SAS^{-1} est de la forme:

a) $3\cdot E_3 + \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_1 & \\ & & J_1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_1 & \\ & & J_1 \end{pmatrix}$ c) $3\cdot E_3 + \begin{pmatrix} J_2 & \\ & J_1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} J_2 & \\ & J_1 \end{pmatrix}$

e) $3\cdot E_3 + J_3$ f) J_3 g) $3\cdot E_3 + \begin{pmatrix} J_2 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} J_2 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$

Exercice 18

L'espace caractéristique N_1 de $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est égal à:

a) $\text{span}((1,0,0,0)^T)$

b) $\text{span}((1,0,0,0)^T, (0,0,0,1)^T)$

c) $\text{span}((1,0,0,0)^T, (1,3,0,1)^T)$

d) $\text{span}((1,0,0,0)^T, (0,4,3,2)^T)$

e) $\text{span}((1,0,0,0)^T, (1,-8,6,-4)^T)$

Exercice 19

Parmi les paires de vecteurs de $\mathbb{C}^2$ suivantes, lesquelles forment une base orthonormée:

a) $v_1 = (1,1)^T$ et $v_2 = (1,-1)^T$

b) $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$

c) $v_1 = (i,0)^T$ et $v_2 = (0,i)^T$

d) $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(i,2)^T$ et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-i)^T$

Exercice 20

Soit $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & -9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Alors:

a) $A \in O(3)$

b) $A \notin O(3)$

c) $A \in SO(3)$

d) $A \notin SO(3)$

Exercice 21

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -16 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Alors il existe $S \in O(3)$ tel que $S^T A S$ est égale à

a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 22

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ et soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^T A\, x$, la forme quadratique associée à A. Alors il existe une base orthonormée (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ tel que $q(\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2)$ vaut

a) $-3\alpha_1^2 - 3\alpha_2^2$

b) $-8\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2$

c) $-64\alpha_1^2 + 4\alpha_2^2$

d) $-8\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2$

e) Aucune de ces réponses.

Exercice 23

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$,

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3 \quad , \quad v_2 = e_1 - e_3 \quad , \quad v_3 = e_2 + e_3,$$

où e_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors la base duale $\mathcal{B}^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ de la base $\mathcal{B}$ vaut:

a) (e_1^*, e_2^*, e_3^*)

b) $(e_1^* - e_2^* + e_3^*, e_2^* - e_3^*, -e_1^* + e_2^* - e_3^*)$

c) $(e_1^* - e_2^*, e_2^* - e_3^*, e_3^* - e_1^*)$

d) $(e_1^* - e_2^* + e_3^*, e_2^* - e_3^*, -e_1^* + 2\, e_2^* - e_3^*)$

Exercices à calculer:

Exercice 24
Donner toutes les matrices orthogonales dont la première et la deuxième colonne sont respectivement données par

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 25
Résolvez le système déquations différentielles aux valeurs initiales

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\,x(t) \qquad , \qquad x(0) = c$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 26
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Déterminez M_A, p_a et la forme normale de Jordan de A.

Exercice 27
Soit la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$.

a) Déterminez une matrice $T \in O(3)$ telle que

$$T^T A T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Déterminez une matrice $S \in U(3)$ telle que $\overline{S}^T A S$ soit diagonale.